Teoria miary i całki
SPPI IIr. semestr zimowy 2006/7
LISTA 1

03/09/06

Zadanie 1
Niech $\mathbf{1}_A$ oznacza funkcję charakterystyczną zbioru A. Pokazać że:

$$\mathbf{1}_{\overline{\lim} A_n} = \overline{\lim}\, \mathbf{1}_{A_n} \text{ i } \mathbf{1}_{\underline{\lim} A_n} = \underline{\lim}\, \mathbf{1}_{A_n}.$$

(Granica górna i dolna dla ciągu funkcji jest rozumiana tak jak na analizie - w każdym punkcie dziedziny.)

Zadanie 2
Udowodnić, że podciąg zbieżnego ciągu zbiorów jest zbieżny do tej samej granicy.

Zadanie 3
Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:
1. $\lim A_n = A$
2. $\underline{\lim}(A_n \Delta A) = \emptyset$
3. $\overline{\lim}(A_n \Delta A) = \emptyset$
($A\Delta B$ oznacza różnicę symetryczną $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.)

Pierścieniem nazywamy rodzinę $\mathcal{A}$ spełniającą warunek:

$$A, B \in \mathcal{A} \implies (A \cup B \in \mathcal{A}) \;\wedge\; (A \setminus B \in \mathcal{A}).$$

Zadanie 4
Udowodnij, że rodzina $\mathcal{A}$ jest pierścieniem wtedy i tylko wtedy gdy jest zamknięta na różnice zbiorów i na sumy rozłączne.

Zadanie 5
Udowodnij, że rodzina $\mathcal{A}$ jest ciałem wtedy i tylko wtedy gdy jest pierścieniem zawierającym X.

Zadanie 6
Czy każda rodzina zamknięta na dopełnienia i sumy rozłączne jest ciałem?

Zadanie 7
Jeśli $Y \subset X$, $Y \neq X$ (czyli Y jest podprzestrzenią właściwą przestrzeni X) i $\mathcal{A}$ jest ciałem w przestrzeni Y, to $\mathcal{A}$ jest pierścieniem (ale nie ciałem) w przestrzeni X. Uzasadnij to.

Zadanie 8
Podaj przykład pierścienia, który nie jest ciałem w żadnej podprzestrzeni.

Zadanie 9
Rodzina $\mathcal{A}$ nazywa się sigma-ciałem jeśli jest jednocześnie ciałem i rodziną monotoniczną. Wykaż, że warunkiem równoważnym jest zamkniętość na dopełnienia i sumy przeliczalne. Czyli, że $\mathcal{A}$ jest sigma-ciałem wtedy i tylko wtedy gdy

$$A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$$

oraz

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ A_n \in \mathcal{A} \implies \bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$$

Zadanie 10
Wykaż, że $\mathcal{A}$ jest sigma-ciałem wtedy i tylko wtedy gdy $\mathcal{A}$ zawiera X, jest zamknięta na różnice zbiorów i na przeliczalne sumy rozłączne.

Zadanie 11
Podaj przykład ciała, które nie jest sigma-ciałem.

Zadanie 12
Sprawdź, że jeśli ciało zawiera tylko skończenie wiele zbiorów to jest sigma-ciałem.

Zadanie 13
Niech $\mathcal{A}$ będzie sigma-ciałem. Wykaż, że dla każdego ciągu A_n zawartego w $\mathcal{A}$, $\overline{\lim} A_n \in \mathcal{A}$ i $\underline{\lim} A_n \in \mathcal{A}$

Zadanie 14
Wykaż, że przekrój dowolnej kolekcji sigma-ciał jest sigma-ciałem.

Zadanie 15
Wykaż, że dla dowolnej rodziny $\mathcal{A}$ istnieje najmniejsze sigma-ciało zawierające $\mathcal{A}$, to znaczy takie sigma ciało $\sigma(\mathcal{A})$, że $\mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{A})$ oraz jeśli $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ i $\mathcal{B}$ jest sigma-ciałem, to $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$.
Uwaga: $\sigma(\mathcal{A})$ nazywamy sigma-ciałem generowanym przez $\mathcal{A}$.

Zadanie 16
Niech $X = \mathbb{R}$. Jakie jest sigma-ciało generowane przez zbiory jednopunktowe?

Zadanie 17
Wykaż, że sigma-ciało generowane przez odcinki otwarte zawiera także odcinki pół-domknięte i domknięte oraz że sigma-ciało generowane przez odcinki domknięte zawiera odcinki pół-domknięte i otwarte.